и функции $u(x,y) \in C^\infty(T^2)$ и любых $s,t \in N$ получены неравенства:

$$||D_{xy}^{t+s}\,u(x,y)||^2_{L_2(T^2)} \leqslant ||D_x^{2t}\,u(x,y)||_{L_2(T^2)} \cdot ||D_y^{2s}\,u(x,y)||_{L_2(T^2)},$$

$$||D_{xy}^{t+s}\,u(x,y)||_{L_p(T^2)} \leqslant$$
$$\leqslant A_p\left(||D_x^{2t+2}\,u(x,y)||_{L_p(T^2)} \cdot ||D_y^{2s+2}\,u(x,y)||_{L_p(T^2)}\right)^{1/2},$$

где $p \neq 2$ — любое из интервала $(1,\infty)$, постоянная A_p зависит только от p и не зависит от функции $u(x,y)$.

М. В. Баран, В. А. Клячин

Волгоград, mihellio@mail.ru, klchnv@mail.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ СЕТОК И ИХ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЯХ

Пусть на плоскости задан набор точек $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$, расположенных в области $D \subset R^2$ и образующих выпуклый шестиугольник. Рассмотрим функцию $f : D \to R$ класса $C^3(D)$. Пусть известны значения этой функции в точках P_i, $i = \overline{0,5}$, $f(P_i) = f_i$. Рассмотрим функцию вида

$$g(x,y) = f_0 + p(x-x_0) + q(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\alpha(x-x_0)^2 + 2\beta(x-x_0)(y-y_0) + \gamma(y-y_0)^2\right),$$

где $P_0 = (x_0, y_0)$. Ясно, что $g(x_0,y_0) = f_0 = f(x_0,y_0)$. Пусть коэффициенты подобраны так, что $f(P_i) = g(P_i)$, $i = \overline{0,5}$.

Теорема 1. *Пусть S — площадь данного шестиугольника, а d — его диаметр. Обозначим*

$$M_3 = \max_{x,y\in D}\left\{\left|\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}\right|, \left|\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right|, \left|\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}\right|, \left|\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\right|\right\}.$$

Тогда

$$\left|p - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{M_3 d^4 S^3}{|A|}, \qquad \left|q - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{M_3 d^4 S^3}{|A|},$$

$$\left|\alpha - \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{4M_3 d^7 S}{|A|}, \qquad \left|\gamma - \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right| \leqslant \frac{4M_3 d^7 S}{|A|},$$

где

$$|A| = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}^{5}(-1)^{i+j+1}\Delta_{ij}\Delta_{kl}\Delta_{km}\Delta_{lm},$$

$$\Delta_{rq} = (a_r c_q - a_q c_r), \quad a_r = x_r - x_0, \quad c_r = y_r - y_0.$$

Таким образом, величина $|A|$ характеризует качество шестиугольной сетки с точки зрения аппроксимации 2-х производных.

Рассмотрим два вида шестиугольников, таких, что для первого выполнено $y_1 = y_5$, $y_2 = y_4$, $x_0 = x_3 = 0$, $x_1 = x_2$, $x_4 = x_5$, а для второго — $y_1 = y_5$, $y_2 = y_4$, $x_0 = x_3 = 0$.

Теорема 2. *Обозначим величину $|A|$ для первого вида шестиугольников как $|A|_1$, а для второго — как $|A|_2$. Тогда*

$$|A|_1 = \frac{1}{64}h_1h_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3)(h_1+h_2)^2(3\tau_1{\tau_2}^2 - 4{\tau_1}^2\tau_2 + {\tau_2}^2\tau_3),$$

$$|A|_2 = \frac{1}{16}h_1h_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3)\tau_2(\tau_3\left(h_1^2\tau_2 - \tau_1(h_1+h_2)^2\right) -$$
$$-h_2\tau_1(4\tau_1h_1 + 2\tau_2h_1 + \tau_2h_2)),$$

где $h_1 = |x_1|$, $h_2 = |x_4|$, $\tau_1 = |y_1|$, $\tau_2 = |y_2 - y_1|$, $\tau_3 = |y_3 - y_2|$.

Теорема 3. *Рассмотрим шестиугольники* $P_0P_1P_2P_3P_4P_5$ *и* $P'_0P'_1P'_2P'_3P'_4P'_5$. *Пусть выполняется условие*

$$l|P_i - P_j| \leqslant |P'_i - P'_j| \leqslant L|P_i - P_j|, \quad i = \overline{0,5}, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$|A'| \geqslant \frac{|A|}{4}\left\{4l^8\left(\frac{l - \frac{l}{1+\sigma}}{L}\right)^4 - \right.$$

$$\left. - \left(L^8\left(\frac{1 - \frac{l^2}{9L^2}}{1 - \frac{l^2}{L^2(1+\sigma)^2}}\right)^2 - l^8\left(\frac{l - \frac{l}{1+\sigma}}{L}\right)^4\right)\Theta\right\},$$

где для первого вида шестиугольников

$$\Theta = \frac{(\tau_1 + \tau_2)\left((\tau_1 + \tau_2)^2 + \tau(\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3)\right)}{\frac{1}{4}(3\tau_1\tau_2{}^2 - 4\tau_1{}^2\tau_2 + \tau_2{}^2\tau_3)},$$

а для второго —

$$\Theta = \frac{4(\tau_1+\tau_2)\left(\tau_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)(h_1{}^2+h_2{}^2)-(h_1(\tau_1+\tau_2)-h_2\tau_1)^2\right)}{\tau_2\left(\tau_3\left(h_1^2\tau_2-\tau_1(h_1+h_2)^2\right)-h_2\tau_1(4\tau_1h_1+2\tau_2h_1+\tau_2h_2)\right)}.$$